

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чумаченко А.Н., Вениг С.Б., Ворошилов С.А., Елина Е.Г., Захарова Т.Г. Опыт Саратовского государственного университета // Стандарты и качество. 2015. № 11. С. 40-41.
2. Бугаева И. О., Клоктунова Н.А., Соловьева В.А., Магомедова М.С. Особенности функционирования системы менеджмента качества в Саратовском государственном медицинском университете имени В. И. Разумовского // Саратовский научно-медицинский журнал. 2015. Т. 11. № 4. С. 597-600.
3. Ворошилов С.А., Ткаченко И.В., Грачева Н.М., Ягубова М.А., Бурмистров А.В., Ворошилов А.С., Шаманова О.А. Мониторинговое исследование как основа управленческих решений в образовании // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Экономика. Управление. Право. 2007. Т. 7. № 1. С. 52-61.
4. Винокурова С.А., Вениг С.Б. Компетенции по управлению качеством как важная составляющая профессиональной квалификации выпускника инженерного образовательного направления // Инженерное образование. 2017. № 21. С. 194-199.
5. Venig S., Vinokurova S. The formation of quality management competences in engineering education // 2013 International Conference on Interactive Collaborative Learning, ICL 2013 2013. С. 714-716.
6. Вениг С.Б., Ворошилов С.А., Федоров В.Г. Стране нужны новые Дубовиковы! // Нано- и биомедицинские технологии. Управление качеством. Проблемы и перспективы Сборник научных статей. Саратов, 2016. С. 20-26.
7. Табакова И.В., Винокурова С.А. Применение FMEA-анализа для реализации риск-ориентированного мышления // Нано- и биомедицинские технологии. Управление качеством. Проблемы и перспективы. Сборник научных статей. Саратов: СГУ, 2018. Вып.2. С. 178-183.

ЧИСЛЕННЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В РАДИОФИЗИКЕ

А.П. Кузнецов¹, Е.П. Селезнев^{1,2}, Н.В. Станкевич³

¹*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.
Котельникова РАН, Саратов, Россия*

²*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им.
Н.Г. Чернышевского*

³*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Саратов, Россия*

e-mail: apkuz@rambler.ru, evgenii_seleznev@mail.ru, stankevichnv@mail.ru

В статье проводится обзор радиофизических приложений, характеризующихся аттракторами с различными специфическими свойствами. Проводится обзор известных методик исследования, а также предлагается новая методика исследования многочастотных квазипериодических колебаний. На примере пяти связанных в кольцо осцилляторов ван дер Поля проводится исследование синхронизации многочастотных торов при вариации параметров связи. Проводится численное исследование модели с помощью анализа полного спектра показателей Ляпунова, а также экспериментальное исследование динамики системы методом кратных сечений Пуанкаре.

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL METHODS OF INVESTIGATION OF COMPLEX OSCILLATORY REGIMES IN RADIO-PHYSICS

A.P. Kuznetsov^{1,3}, **E.P. Seleznev**^{1,3}, **N.V. Stankevich**^{1,2,4}

¹Saratov Branch of Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov, Russia

²Chernyshevsky Saratov State University, Saratov, Russia

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

e-mail: apkuz@rambler.ru, evgenii_seleznev@mail.ru, stankevichnv@mail.ru

In the present paper a review of radiophysical applications characterized by attractors with various specific properties is presented. A review of known research methods is conducted, and a new technique for investigating multi-frequency quasiperiodic oscillations is proposed. On the example of five ring coupled van der Pol oscillators, a investigation of the synchronization of multi-frequency tori with a variation of the coupling strength is carried out. A numerical study of the model is carried out using the analysis of the full spectrum of Lyapunov exponents, as well as an experimental study of the dynamics of the system by the method of multiple Poincaré sections.

Одним из современных направлений исследований в области нелинейной динамики является построение систем, в которых притягивающие множества обладают специфическими свойствами. К таким множествам можно отнести так называемые гиперболические аттракторы, странные нехаотические аттракторы и также многомерные торы [1-3].

К гиперболическим относят аттракторы, у которых все траектории в фазовом пространстве динамической системы имеют седловой тип, с хорошо определенными подпространствами устойчивых и неустойчивых многообразий в окрестности траектории. В литературе примеры гиперболических аттракторов представлены искусственными математическими конструкциями, такими, как аттрактор Плыкина и соленоид Смейла – Вильямса [2]. Реализация потоковых математических моделей, в которых наблюдаются гиперболические аттракторы, представляется достаточной сложной. Еще более сложной представляется реализация реальных физических систем, в которых существуют аттракторы гиперболического типа. Сложность реализации

связана с тем, что необходимо провести специальную обработку экспериментальных данных с целью доказательства гиперболичности. Так, при численных исследованиях для доказательства гиперболичности аттрактора строятся так называемые конусы устойчивых и неустойчивых многообразий [4,5]. В физическом эксперименте такое доказательство невозможно, и для того, чтобы показать, что аттрактор является гиперболическим, строится аттрактор в сечении Пуанкаре, для полученного множества определяются фазы, для которых, в свою очередь, строится отображение последования. Если полученной отображение имеет вид отображения Бернулли, то наблюдаемый аттрактор относится к гиперболическому типу [2].

Другой пример специфических предельных множеств – это странные нехаотические аттракторы [6]. Странные нехаотические аттракторы одновременно являются устойчивыми по Ляпунову, но в тоже время обладают фрактальными свойствами. Они реализуются в нелинейных системах, находящимся под внешним квазипериодическим воздействием, однако доказательство рождения странного нехаотического аттрактора достаточно сложное. Прямой путь показать, что наблюдаемый аттрактор является странным нехаотическим заключается в вычислении старшего ляпуновского показателя и фрактальной меры. Однако при изучении свойств аттракторов в динамических системах фрактальные меры редко используются в качестве доказательства, так как являются предельными величинами, тем более в физическом эксперименте. Для идентификации странных нехаотических аттракторов используется так называемый метод рациональных аппроксимаций, он используется как при численных исследованиях, так и в физическом эксперименте [7-10].

В настоящей работе более подробно мы рассмотрим вопросы

исследования в радиофизическом эксперименте многомерных торов или квазипериодических колебаний, в спектре которых наблюдаются три и более несоизмеримых частот.

2. Многочастотные квазипериодические колебания.

Математическая модель. Вопросы исследования многочастотных квазипериодических колебаний остаются актуальными уже на протяжении пятидесяти лет. В начале 70-х годов XX века Рюэль и Такенс предложили свой сценарий возникновения турбулентности, хотя их рассуждения носили столь общий характер, что могли быть отнесены, по существу, к любым многомерным диссипативным нелинейным системам со сложной динамикой. Согласно этому сценарию, при изменении управляющего параметра переход к хаосу наступает после возникновения небольшого числа колебательных составляющих движения и обусловлен появлением странного аттрактора. Была доказана теорема, которая указывает на существование в окрестности трехмерного тора гиперболических аттракторов, что, в свою очередь, привело к мнению, что трехмерные торы являются структурно неустойчивыми и их наблюдение представляется весьма сложным. Многочисленные исследования квазипериодических колебаний в системах различной физической природы указывали, что переход к хаосу от квазипериодических колебаний к хаосу происходит через разрушение двумерного тора. В итоге к настоящему времени эволюция двумерного тора изучена досконально, чего нельзя сказать об исследованиях систем, в которых аттракторами являются торы трех и более высокой размерности [3].

В последнее время изучению многомерных квазипериодических колебаний уделяется большое внимание, поскольку, с одной стороны, они являются не таким сложными, как хаотические, но при этом же

непериодическими, что делает их интересными для анализа. Одним из ключевых вопросов при их исследовании является проблема их диагностики, как в численном, так и в физическом эксперименте.

Для численного анализа систем, в динамике которых наблюдаются многомерные торы, наиболее эффективным является анализ полного спектра показателей Ляпунова, который позволяет отличить хаотические колебания от квазипериодических, а также выявить гиперхаотические и классифицировать квазипериодические колебания с различным числом несоизмеримых частот.

В эксперименте проанализировать спектр показателей Ляпунова не представляется возможным, а элементарное наблюдение фазовых портретов и спектров мощности колебаний не позволяют отличить многомерные торы от двумерного. Альтернативным вариантом в данном случае представляется построение многомерных сечений Пуанкаре [11].

Наиболее просто реализовать квазипериодические колебания можно в неавтономных системах, представляющих собой автоколебательные системы под внешним периодическим воздействием, или ансамбли связанных автоколебательных элементов. В рамках данной мы рассмотрим особенности исследования многочастотных квазипериодических колебаний на примере связанных в кольцо автогенераторов в численном и физическом эксперименте.

Объектом исследования является система пяти связанных в кольцо осцилляторов ван дер Поля. На рис.1 представлена принципиальная схема, демонстрирующая топологию связи осцилляторов. Связь между осцилляторами - диссипативная.

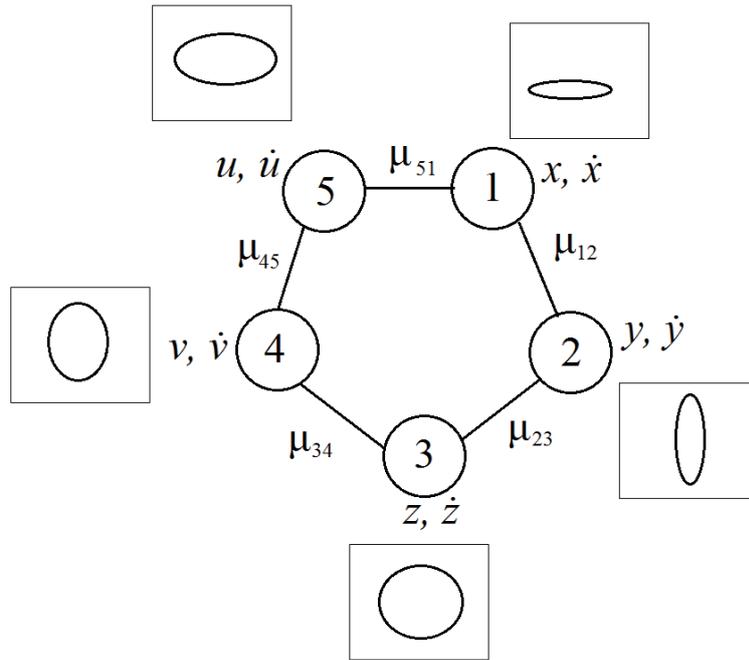


Рис. 1. Принципиальная схема пяти связанных осцилляторов.

Схема, представленная на рис. 1, может быть записана в виде системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{1}{2}\mu_{12}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{1}{2}\mu_{51}(\dot{x} - \dot{v}) = 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + (1 + \frac{\Delta}{4})y + \frac{1}{2}\mu_{23}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{1}{2}\mu_{12}(\dot{y} - \dot{z}) = 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + (1 + \frac{\Delta}{2})z + \frac{1}{2}\mu_{34}(\dot{z} - \dot{y}) + \frac{1}{2}\mu_{23}(\dot{z} - \dot{v}) = 0, \\ \ddot{v} - (\lambda_4 - v^2)\dot{v} + (1 + \frac{3\Delta}{4})v + \frac{1}{2}\mu_{45}(\dot{v} - \dot{z}) + \frac{1}{2}\mu_{34}(\dot{v} - \dot{w}) = 0, \\ \ddot{w} - (\lambda_5 - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta)w + \frac{1}{2}\mu_{51}(\dot{w} - \dot{v}) + \frac{1}{2}\mu_{45}(\dot{w} - \dot{x}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где x, y, z, w и v – динамические переменные, λ – параметр, отвечающий за бифуркацию Андронова-Хопфа в индивидуальном осцилляторе ван дер Поля, $\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{34}, \mu_{45}, \mu_{51}$ – коэффициенты связи между каждой парой осцилляторов, Δ – частотная расстройка автогенераторов. Частоты осцилляторов заданы таким образом, чтобы система имела

эквидистантный спектр собственных частот.

3. Численное исследование динамики системы с многочастотными квазипериодическими колебаниями. Основным инструментом численного исследования многочастотных квазипериодических колебаний является анализ полного спектра показателей Ляпунова. Динамическая система характеризуется несколькими показателями Ляпунова, в соответствии с размерностью фазового пространства системы. В общем случае каждый из показателей диагностирует расхождение или сближение соседних фазовых траекторий в фазовом пространстве. Наличие хотя бы одной положительной экспоненты говорит о том, что в системе есть неустойчивое направление, и, в соответствии с определением устойчивости по Ляпунову, в такой системе наблюдается хаотический аттрактор. Для любой автоколебательной системы обязательным является наличие нулевого показателя Ляпунова в спектре, т.к. он указывает на направление, вдоль которого движется фазовая траектория. Дополнительные нулевые показатели в спектре означают наличие в системе несоизмеримых частот, т.е. возникновение квазипериодических колебаний. Количество дополнительных нулевых экспонент в спектре определяет количество несоизмеримых частот. Также с помощью анализа полного спектра показателей Ляпунова можно диагностировать гиперхаос, когда в системе не одно, а два или более неустойчивых направлений, т.е. два или более положительных показателей в спектре.

Кроме диагностики различных типов колебательных режимов, показатели Ляпунова позволяют различать разные бифуркации квазипериодических колебаний. В настоящее время не существует инструментария, позволяющего проводить бифуркационный анализ квазипериодических колебаний. По динамике спектра показателей

Ляпунова при вариации параметров можно выделить три типа бифуркации многочастотных торов: седло-узловые квазипериодические колебания, квазипериодическая бифуркация Андронова-Хопфа, а также бифуркации удвоения тора.

Для расчета показателей Ляпунова в данной работе использовался известный алгоритме Бенеттина. Для этого проводилось совместное решение уравнений (1) и комплекта уравнений в вариациях:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 dx = dx_1, \\
 dx_1 = -2x dx + (\lambda_1 - x^2) dx_1 - dx - \frac{1}{2} \mu_{12} (dx_1 - dy_1) - \frac{1}{2} \mu_{51} (dx_1 - dv_1) = 0, \\
 dy = dy_1, \\
 dy_1 = -2y dy + (\lambda_2 - y^2) dy_1 - (1 + \frac{\Delta}{4}) dy - \frac{1}{2} \mu_{23} (dy_1 - dz_1) - \frac{1}{2} \mu_{12} (dy_1 - dx_1) = 0, \\
 dz = dz_1, \\
 dz_1 = -2z dz + (\lambda_3 - z^2) dz_1 - (1 + \frac{\Delta}{2}) dz - \frac{1}{2} \mu_{34} (dz_1 - dv_1) - \frac{1}{2} \mu_{23} (dz_1 - dy_1) = 0, \\
 dv = dv_1, \\
 dv_1 = -2v dv + (\lambda_4 - v^2) dv_1 - (1 + \frac{3\Delta}{4}) dv - \frac{1}{2} \mu_{45} (dv_1 - dw_1) - \frac{1}{2} \mu_{34} (dv_1 - dz_1) = 0, \\
 dw = dw_1, \\
 dw_1 = -2w dw + (\lambda_5 - w^2) dw_1 - (1 + \Delta) dw - \frac{1}{2} \mu_{51} (dw_1 - dx_1) - \frac{1}{2} \mu_{45} (dw_1 - dv_1) = 0.
 \end{array} \right.$$

(2)

Для того, чтобы рассчитать полный спектр показателей Ляпунова, что необходимо для диагностики многочастотных квазипериодических колебаний, по завершении определенного времени (так называемое время нормировки) на каждом этапе проводится ортогонализация векторов возмущения по Грамму–Шмидту и нормализация на фиксированную константу, для того что. Показатели Ляпунова получаются из оценки скорости нарастания накапливающихся сумм логарифмов от коэффициентов приращения норм соответствующих векторов.

Удобным методом визуализации динамических режимов является

метод карт показателей Ляпунова. Суть метода заключается в том, что плоскость управляющих параметров сканируется с каким-то небольшим шагом. В каждой точке плоскости параметров рассчитывается полный спектр показателей Ляпунова, в зависимости от которого точка на плоскости окрашивается в тот или иной цвет.

Рассмотрим динамику математической модели (1) с помощью анализа показателей Ляпунова. Так как в нашей системе мы исследуем распределенную связь, то будем следить за динамикой системы на плоскостях параметров коэффициентов связи между различными осцилляторами. Если в системе (1) положить все коэффициенты связи равными нулю, то, при условии, что частоты всех генераторов находятся в иррациональном соотношении, мы получим колебания с пятью независимыми частотами. При включении связи пятичастотные квазипериодические колебания будут реализовываться при малой связи. С увеличением силы связи в результате синхронизации будет происходить перестройка типов режимов к четырехчастотному, трехчастотному и т.д.

На рис. 2 представлена карта показателей Ляпунова для системы (1). Мы выбрали плоскость параметров, отвечающих за связь между соседними осцилляторами, но с наиболее расстроенными параметрами: коэффициент связи между пятым и первым осциллятором и коэффициент связи между первым и вторым осциллятором.

Различными оттенками серого цвета на рис.2а) обозначены области пяти-, четырех- и трехчастотной квазипериодической динамики. Как видно из рисунка, при нулевых коэффициентах связи в системе реализуются пятичастотные квазипериодические колебания, с увеличением связи происходит переход от пятичастотных к четырехчастотным колебаниям. Стоит отметить различную величину

порога бифуркации, данная особенность связана с различными частотами генерации автономных осцилляторов, чтобы синхронизовать более высокочастотные колебания, необходима большая сила связи. С дальнейшим увеличением связи наблюдается переход к трехчастотным колебаниям.

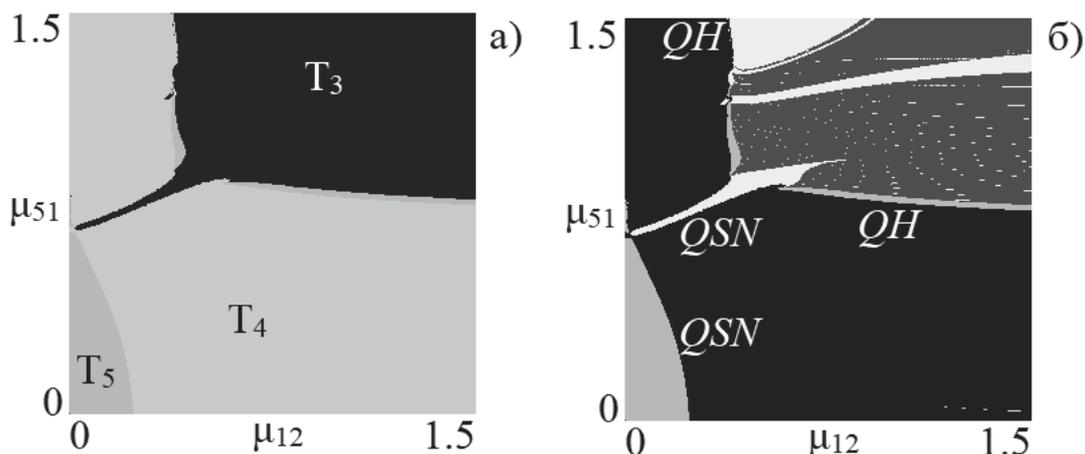


Рис. 2. Карты показателей Ляпунова модели (1) при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0.5$, $\Delta=1$, $\mu_{23}=\mu_{34}=\mu_{45}=0.01$. Рис.2 а) соответствует классической карте, где обозначены области пяти- (T_5), четырех- (T_4) и трехчастотной квазипериодики (T_3). Рис.2 б) - модифицированная карта, на которой обозначены типы бифуркаций торов, QSN - седло-узловая квазипериодическая бифуркация, QH - квазипериодическая бифуркация Андронова-Хопфа.

Как говорилось ранее показатели Ляпунова не только позволяют идентифицировать сами режимы, но также и диагностировать квазипериодическую бифуркацию. Для идентификации различных типов бифуркаций была построена модифицированная карта, в которой отдельным цветом отмечались области, где показатели Ляпунова попарно равны друг другу по абсолютной величине. Равенство двух показателей Ляпунова перед бифуркацией говорит о том, что данная бифуркация соответствует квазипериодической бифуркации Андронова-Хопфа, т.е. мягкому рождению дополнительной частоты. Таким образом, на рис.2 б) мы видим, что переход от пятичастотного тора к четырехчастотному происходит в результате седло-узловой бифуркации, что соответствует классической синхронизации на торе. Также

наблюдается узкий язык трехчастотной квазипериодики, которая также переходит в четырехчастотный режим через квазипериодическую бифуркацию седло-узел. Для трехчастотной квазипериодики при отстройке связи между осцилляторами наблюдаются также две большие области, где происходит переход через квазипериодическую бифуркацию Хопфа.

4. Экспериментальное исследование динамики системы с многочастотными квазипериодическими колебаниями. Рассмотрим динамику экспериментальной системы. На рис. 3а) представлена блок-схема экспериментальной установки, она включает исследуемую систему пяти связанных в кольцо автогенераторов (рис.3б)), устройство ввода данных типа NI USB 6211 в персональный компьютер. Ключевым элементом установки является схема совпадений (рис.4), которая фиксирует момент времени, в который переменные dy/dt , dz/dt , dw/dt и dv/dt достигают фиксированных значений, которые определяют гиперплоскость сечения в фазовом пространстве системы. На выходе схемы совпадений формируется импульс, который поступает на вход внешнего запуска импульсного генератора. На выходе импульсного генератора формируется прямоугольный импульс ТТЛ уровня, который запускает схему ввода-вывода и в этот момент времени происходит запоминание мгновенных значений динамических переменных исследуемой системы.

В процессе наблюдения в компьютер пишутся ряды динамических переменных исследуемой. В целом экспериментальная установка позволяла строить аттракторы в сечении Пуанкаре размерности от одного до четырех.

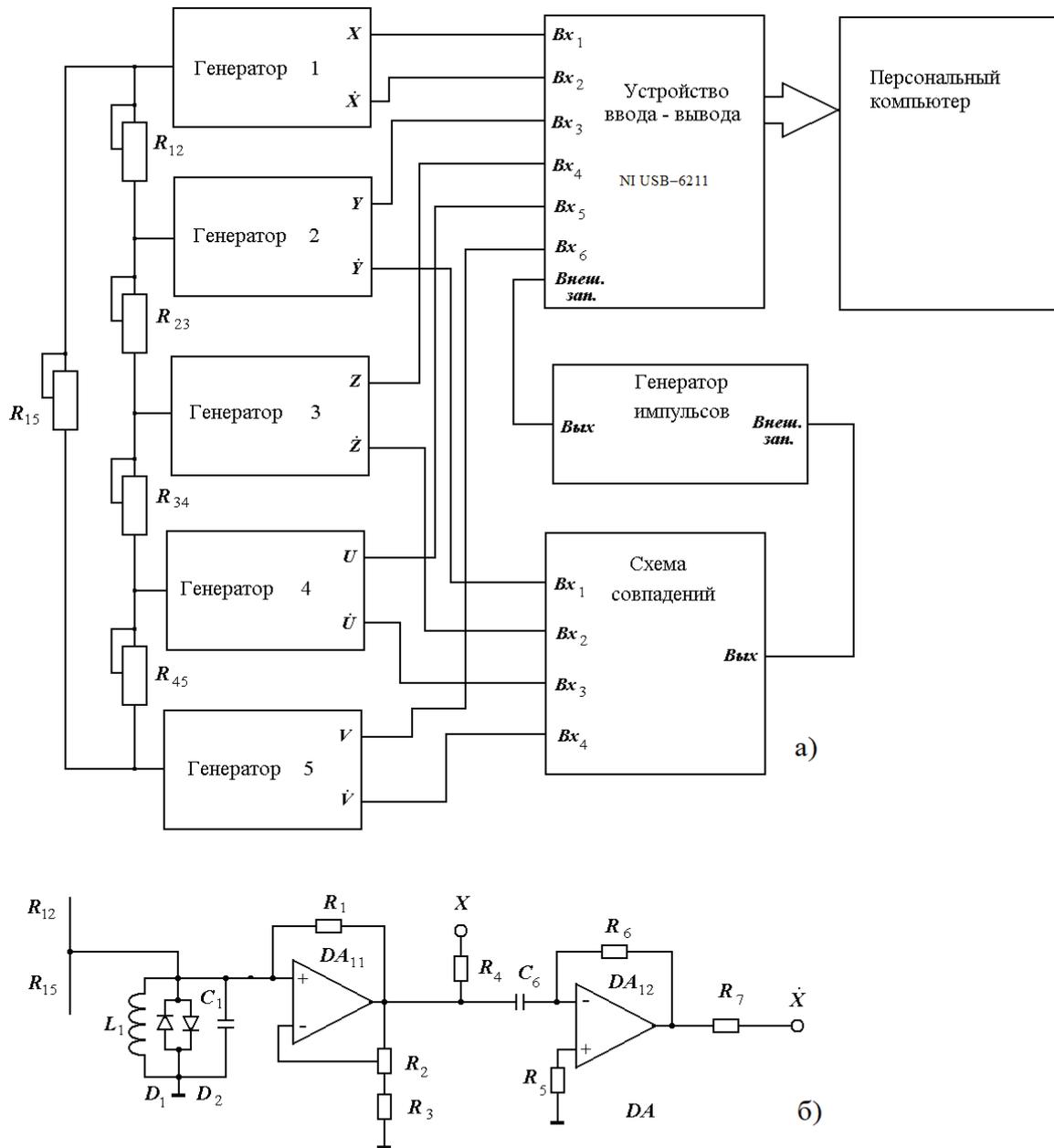


Рис. 3. а) блок-схема экспериментальной установки; б) схема устройства одного из автогенераторов.

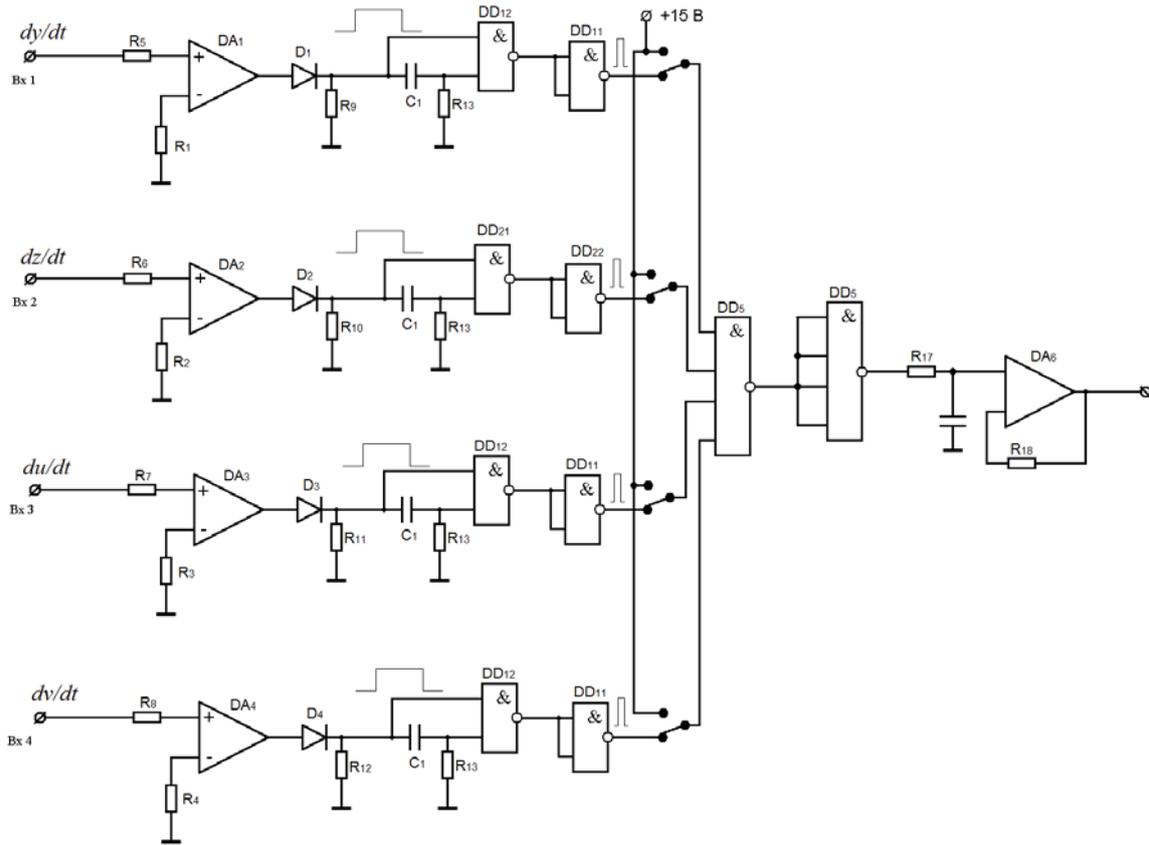


Рис. 4. Схема совпадений.

На рис. 5 представлены проекции фазового портрета на плоскость (X, Y) в различных вариантах без сечения и в различных сечениях Пуанкаре. Для пятимерного тора только в случае четырехкратного сечения Пуанкаре на фазовой плоскости наблюдается инвариантная кривая, что указывает на то, что метод многомерных сечений Пуанкаре позволяет уверенно идентифицировать многомерные торы. С помощью данной методики также была проанализирована динамика системы при вариации параметров. На рис.6 представлена карта динамических режимов, полученная в эксперименте. На рисунке отмечены области пятичастотной и четырехчастотной квазипериодической динамики.

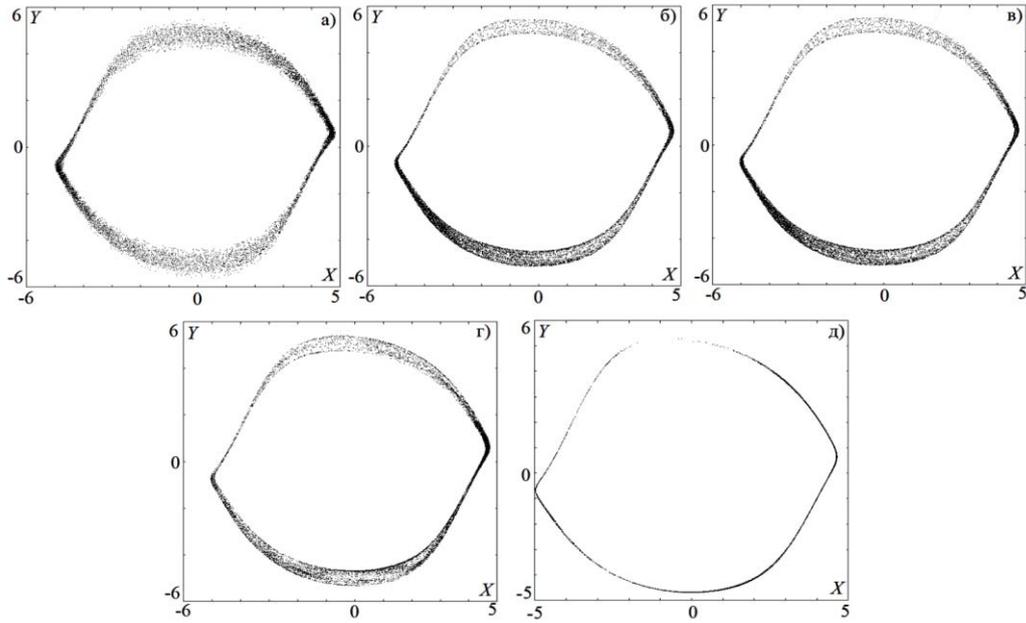


Рис. 5. Двумерная проекция фазового портрета на плоскость (X, Y) а) без сечения; б) сечение поверхностью $dY/dt = 0$; в) двойное сечение гиперповерхностью $dY/dt = 0, dZ/dt = 0$; г) тройное сечение гиперповерхностью $dY/dt = 0, dZ/dt = 0, dU/dt = 0$; д) четырехкратное сечение Пуанкаре гиперповерхностью $dY/dt = 0, dZ/dt = 0, dU/dt = 0, dV/dt = 0$.

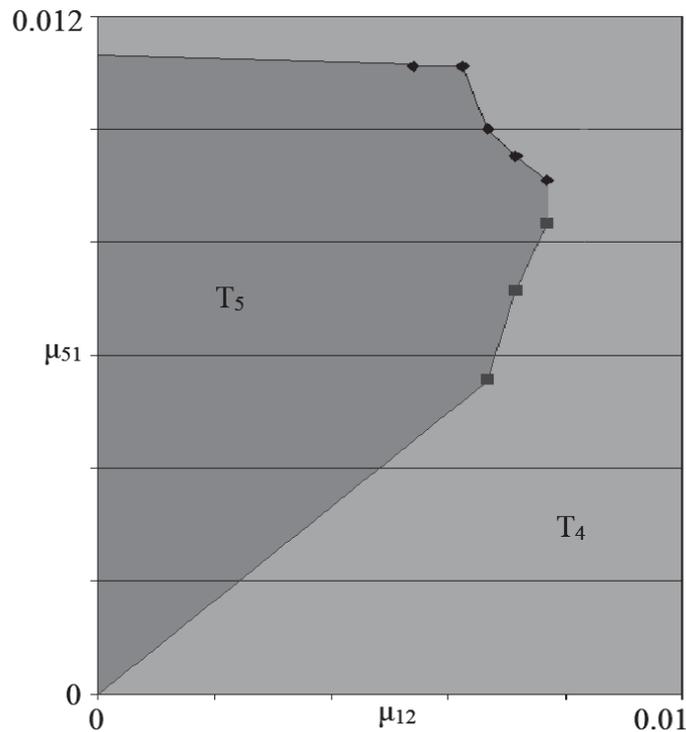


Рис. 6. Карта динамических режимов, полученная экспериментально при исследовании пяти связанных автогенераторов.

Таким образом предложены и апробированы методики численного и экспериментального исследования динамических систем в поведении

которых наблюдаются многомерные квазипериодические колебания, которым в фазовом пространстве соответствуют многомерные торы. Предложенные методики позволяют уверенно диагностировать как в численных исследованиях, так и в физическом эксперименте эволюцию многомерных торов, их бифуркации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-12-01008)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P.* Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems //Physical Review E. – 2016. – Т. 94. – №. 1. – С. 010201.
- 2 *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика со странным аттрактором типа Смейла Вильямса. - ЖЭТФ. – Т.129. - №2. – С. 400-412.
- 3 *Grebogi C. et al.* Strange attractors that are not chaotic //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1984. – Т. 13. – №. 1-2. – С. 261-268.
- 4 *Б.П. Безручко, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский, Е.П. Селезнев, У. Фойдель.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора. // Изв. ВУЗов, ПНД, 1997, Т.5, № 6, С.3-19
- 5 *Bezruchko V.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Ye.P.* "Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point", Phys. Rev. E, 2000, V.62, No. 6, 7828-7830
- 6 *Е.П. Селезнев, А.М. Захаревич.* Динамика нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии. // Письма в ЖТФ, 2005, Т.31, В. 17, С.13-18
- 7 *Stankevich N.V., Kuznetsov A.P., Popova E.S. and Seleznev E.P.* Experimental diagnostics of multy-frequency quasiperiodic oscillations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 43, pp.200-210.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ АНСАМБЛЕЙ ГЕНЕРАТОРОВ СО СЛОЖНЫМИ СВЯЗЯМИ

Д.Д. Кульминский^{1,2}

¹*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия*

²*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: kulminskydd@gmail.com*